

Решения вступительной олимпиады по математике. 7 класс. 2021 год

1. Докажите, что из 2021 полоски бумаги шириной 1 и длинами 1, 2, ..., 2021 можно составить прямоугольник, длина и ширина которого больше 1.

Расположим полоски бумаги так, чтобы первый ряд строимого прямоугольника составили полоски размерами 1×1 и 2020×1 . Во втором ряду расположим полоски размерами 2×1 и 2019×1 . В третьем ряду – размерами 3×1 и 2018×1 и так далее. Предпоследний ряд займут полоски размерами 1010×1 и 1011×1 . И, наконец, в последний ряд поместим самую длинную полоску размером 2021×1 . В итоге мы получили прямоугольник, при составлении которого использовали все 2021 полоску, и длина и ширина которого больше 1.

1x1	2020 x 1
2 x 1	2019 x 1
3 x 1	2018 x 1
...	
1010 x 1	1011 x 1
2021 x 1	

2. Сумма пяти различных чисел равна 50, сумма каких-то четырёх из них равна 40, а сумма каких-то трёх равна 30. Докажите, что из этих пяти чисел можно выбрать четыре различных числа a, b, c и d так, что $a + b = c + d$.

Пусть даны числа a, b, c, d и e . Тогда $a + b + c + d + e = 50$. Пусть $a + b + c + d = 40$, тогда $e = 10$. По условию сумма каких-то трёх чисел равна 30. Пусть все из этих трёх чисел содержатся в наборе чисел a, b, c, d . Тогда оставшееся из этих четырёх чисел равно 10 и мы приходим к противоречию с условием, так как нашли два одинаковых числа (число e тоже равно 10), а по условию все данные числа различны.

Таким образом, в сумме, равной 30, участвуют только **два** каких-нибудь числа из набора чисел a, b, c, d и число e . Пусть эти два числа из набора чисел a, b, c, d равны a и b . Тогда их сумма равна 20. Следовательно, $c + d = 20$. А значит $a + b = c + d$, что и требовалось доказать.

3. 23 детям в детском саду показали картинку и попросили записать, что на ней изображено. Часть детей написали КЫСЯ, часть детей – МУРЛОКОТАМ, а остальные – КОТЯРКА. Буква К была написана 30 раз, буква Я была написано 20 раз. Сколько детей написали слово КЫСЯ?

Пусть x детей написали слово «КЫСЯ», y детей написали «МУРЛОКОТАМ», а z детей – «КОТЯРКА». Тогда $x + y + z = 23$. Так как в словах «КЫСЯ» и «МУРЛОКОТАМ» буква «к» встречается один раз, а в слове «КОТЯРКА» – два раза, то $x + y + 2z = 30$. Наконец, так как буква «я» встречается по одному разу и только в словах «КЫСЯ» и «КОТЯРКА», то $x + z = 20$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 23, \\ x + y + 2z = 30, \\ x + z = 20. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем, что $z = 7$. Подставляя найденное значение z в третье уравнение, получаем, что $x = 13$.

Ответ: 13 детей написали слово «КЫСЯ».

4. На крыше здания сидели вороны. Когда пришёл хулиган Лёша и пальнул в них из рогатки, 75% ворон улетели; вместо них на крышу прилетело 80 других ворон. Тогда хулиган Лёша пальнул в них ещё раз, и 80% ворон улетело, а взамен прилетело 75 других ворон. В результате ворон на крыше оказалось меньше, чем до начала хулиганских действий Лёши. Какое наименьшее число ворон могло сидеть на крыше до Лёшиного прихода?

Пусть сначала на крыше здания сидело x ворон. Тогда после того, как улетело 75% ворон, их осталось $x - 0,75x = 0,25x$. Далее, после того как на крышу прилетело 80 других ворон, на крыше стало $(0,25x + 80)$ ворон. Во второй раз ворон осталось

$$\left(\frac{1}{4}x + 80\right) - \left(\frac{1}{4}x + 80\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{20}x + 16,$$

а после того, как прилетело 75 других ворон, их стало

$$\frac{1}{20}x + 16 + 75 = \frac{1}{20}x + 91.$$

Из этой формулы следует, что первоначальное число ворон кратно 20. Наконец, по условию задачи $x > x/20 + 91$. Проверим это неравенство для чисел, делящихся на 20:

$$20 \leq \frac{1}{20} \cdot 20 + 91 = 92,$$

$$40 \leq \frac{1}{20} \cdot 40 + 91 = 93,$$

$$60 \leq \frac{1}{20} \cdot 60 + 91 = 94,$$

$$80 \leq \frac{1}{20} \cdot 80 + 91 = 95.$$

А при $x = 100$ (следующее число, кратное 20) неравенство уже верно.

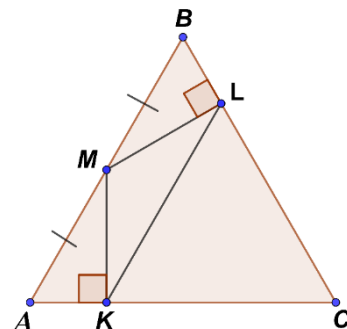
Ответ: наименьшее число ворон, которые могли сидеть на крыше до Лёшиного прихода, равно 100.

5. Из середины M стороны AB равностороннего треугольника ABC опустили перпендикуляры MK и ML на стороны AC и BC . Найдите KL , если $AB = 1$.

Заметим, что $\triangle AMK = \triangle BML$ как прямоугольные по гипотенузе ($AM = MB = 1/2$) и острому углу ($\angle A = \angle B = 60^\circ$). Тогда из равенства треугольников следует, что $AK = BL$. Далее, заметим, что $\angle AMK = \angle BML = 30^\circ$. Тогда по свойству прямоугольного треугольника о катете, лежащем напротив угла 30° , имеем, что $AK = BL = 1/4$, следовательно, $KC = LC = 3/4$.

Рассмотрим $\triangle KLC$. В нём $KC = LC$ и $\angle C = 60^\circ$. Значит, он равносторонний и $KL = 3/4$.

Ответ: $KL = 3/4$.



6. Сто баранов бегут в ряд на расстоянии 6 метров друг от друга со скоростью 5 км/ч. Навстречу им со скоростью 1 км/ч идёт пастух, который при встрече с бараном мгновенно разворачивает его в противоположном направлении, и тот продолжает бежать с прежней скоростью. Найдите расстояние между баранами при их обратном движении.

Пусть t_1 – момент встречи пастуха с первым бараном, а t_2 – со вторым. В момент t_1 расстояние между пастухом и вторым бараном равнялось 6 м, то есть за время $t_2 - t_1$ они сблизились на 6 метров.

Поскольку баран быстрее пастуха в 5 раз, то второй баран за это время преодолел 5 метров, а пастух – 1 метр. За это время первый баран тоже пробежал 5 метров в том же направлении, что и пастух и расстояние между первым бараном и пастухом стало равно $5 - 1 = 4$ метра.

Поскольку после этого бараны бегут друг за другом с одинаковой скоростью, то расстояние между ними будет сохраняться и дальше. Это верно и для любых двух соседних баранов.

Ответ: 4 метра.

