

Решения вступительной олимпиады по математике. 8 класс. 2021 год

1. Каждое из трёх натуральных чисел $n, n + 1, n + 2$ делится на квадрат какого-нибудь натурального числа, отличного от единицы. Может ли число n быть трёхзначным?

Ответ: Да. Например, $n = 124$. $124 : 4, 125 : 25, 126 : 9$.

2. Один из корней уравнения $x^2 + ax - 15 = 0$ равен 3. Найдите число a и второй корень уравнения.

Первый способ: По теореме Виета произведение корней данного уравнения равно -15 , значит, второй корень равен $-\frac{15}{3} = -5$, сумма корней равна $-a = 3 + (-5) = -2$, откуда $a = 2$.

Второй способ: Достаточно подставить 3 в уравнение, откуда $9 + 3a - 15 = 0$, то есть $a = 2$. Второй корень найдём как в первом варианте решения.

Ответ: второй корень равен (-5) , $a = 2$.

3. На странице во всех строках одно и то же число букв. Если увеличить число строк и число букв в строке на 4, то число букв на странице увеличится на 464. На сколько уменьшится число букв на странице, если уменьшить число строк и число букв в строке на 3?

Пусть a – количество строк на странице, b – количество букв в строке. Тогда из первого условия получаем: $(a + 4) \cdot (b + 4) - ab = 464$, $4(a + b) = 448$, $a + b = 112$. После второй операции (уменьшение на три) получим изменение количества букв, равное $ab - (a - 3) \cdot (b - 3) = 3(a + b) - 9 = 3 \cdot 112 - 9 = 327$.

Ответ: 327.

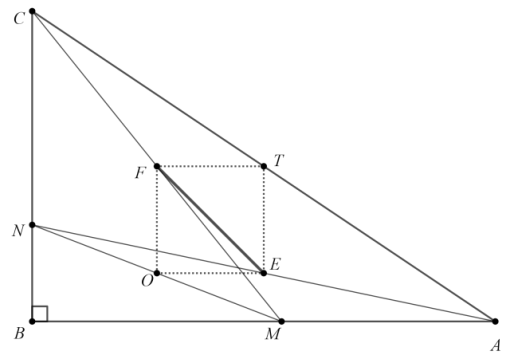
4. На катетах BC и BA прямоугольного треугольника ABC отложены отрезки $CN = AM = 6$. Точка E – середина AN , точка F – середина CM , точка O – середина MN . а) Докажите, что $OE = OF$. б) Найдите расстояние между серединами отрезков MN и AC .

а) OF и OE – средние линии треугольников с основаниями CN и AM , которые равны 6. Значит, $OF = OE = 3$.

б) Пусть T – середина AC . Тогда TE и TF – средние линии треугольников с основаниями CN и AM , которые равны 6. Значит $TF = TE = 3$. Тогда $OFTE$ – ромб. Так как $CN \perp AM$, а TF и TE им параллельны, то $OFTE$ – это квадрат со стороной 3.

Тогда искомая величина $TO = 3\sqrt{2}$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.



5. Две прямые $y = ax + b$ и $y = cx + d$ пересекаются в точке $A(1,1)$. Одна из точек пересечения парабол $y = (ax + b)^2$ и $y = (cx + d)^2$ лежит на оси ординат. Докажите, что $b = -d$.

Из первого условия $a + b = c + d = 1$. Параболы пересекаются на оси ординат, значит ноль – корень уравнения $(cx + d)^2 = (ax + b)^2$. Отсюда $b^2 = d^2$. Если $b = d$, то $a = c$, и прямые совпадают, а не пересекаются. Значит $b = -d$.

6. Юра съедает пиццу за 20 минут, а пирог – за 24 минуты. Леша съедает такие же пиццу и пирог соответственно за 26 и за 18 минут. Что они вместе съедят быстрее – пиццу или пирог?

За минуту ребята съедят $\frac{1}{20} + \frac{1}{26}$ долю пиццы или $\frac{1}{24} + \frac{1}{18}$ долю пирога. $\frac{1}{20} < \frac{1}{18}$; $\frac{1}{26} < \frac{1}{24}$, значит скорость поедания пирога выше, и пирог съедят быстрее.

Ответ: пирог.