Решения вступительной олимпиады по математике. 9 класс. 2021 год

1. Решите неравенство $(6+x-x^2)^2+(x^3+x^2-x+2)^2 \le 0$.

Квадрат любого числа не может быть отрицательным, а значит сумма двух квадратов тоже не может быть отрицательна, но может быть равна нулю, если оба числа равны нулю. Тогда исходное неравенство равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} 6+x-x^2=0, \\ x^3+x^2-x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=3, \end{array}\right. \\ x^3+x^2-x+2=0. \end{cases}$$

Подставим -2 и 3 в последнее уравнение: $-8+4+2+2=0$; $27+9-3+2 \neq 0$, значит единственное решение неравенства – это число -2.

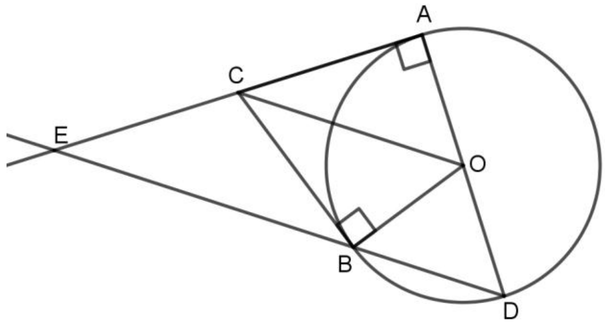
Ответ: -2.

2. Сравните числа $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}$ и $\sqrt{2}$.

Заметим, что $4+2\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=\left(1+\sqrt{3}\right)^2$, тогда $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=1<\sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}<\sqrt{2}$.

3. Прямые CA и CB касаются некоторой окружности в точках A и B соответственно, AD – диаметр этой окружности. Прямые DB и AC пересекаются в точке E. Докажите, что C – середина AE.



Пусть O – центр окружности. Проведем отрезок OC. Радиусы OA и OB перпендикулярны соответственно AC и BC. Прямоугольные треугольники AOC и BOC равны. Значит, равны центральные углы AOC и BOC, которые равны половинам дуги BA. Вписанный угол ADE также равен половине дуги BA. Так как $\angle AOC=\angle ADE$, то $OC \parallel DE$. Поскольку O – середина AD, значит OC – средняя линия треугольника ADE и, следовательно, C – середина AE.

4. 23 детям в детском саду показали картинку и попросили записать, что на ней изображено. Часть детей написали КЫСЯ, часть детей — МУРЛОКОТАМ, а остальные — КОТЯРКА. Букв К было написано 30, букв Я было написано 20. Сколько детей написали КЫСЯ?

Пусть x детей написали слово «КЫСЯ», y детей написали «МУРЛОКОТАМ», а z детей – «КОТЯРКА». Тогда $x+y+z=23$. Так как в словах «КЫСЯ» и «МУРЛОКОТАМ» буква «к» встречается один раз, а в слове «КОТЯРКА» – два раза, то $x+y+2z=30$. Наконец, так как буква «я» встречается по одному разу и только в словах «КЫСЯ» и «КОТЯРКА», то $x+z=20$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=23, \\ x+y+2z=30, \\ x+z=20. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем, что $z=7$. Подставляя найденное значение z в третье уравнение, получаем, что $x=13$.

Ответ: 13 детей написали слово «КЫСЯ».

5. Турист идет из одного города в другой, каждый день проходя больше, чем в предыдущий день, на одно и то же расстояние. Известно, что за первый день турист прошел 11 километров.

Определите, сколько километров прошел турист за третий день, если весь путь он прошел за 6 дней, а расстояние между городами составляет 81 километр.

Обозначим буквой d разницу в расстоянии. Тогда за 6 дней он прошел:

$$11 + (11 + d) + (11 + 2d) + (11 + 3d) + (11 + 4d) + (11 + 5d) = 66 + 15d.$$

Так как $66 + 15d = 81$, получаем $d = 1$, значит за третий день он прошел 11+2=13 километров.

Ответ: 13 км.

6. Решите уравнение $\frac{2x^2-7x-2}{x^2-5x+6} = \frac{2x^2-7x-2+x^2-4}{x^2-5x+6+x^2-4}$.

Заменим громоздкие выражения буквами: $2x^2 - 7x - 2 = a$, $x^2 - 5x + 6 = b$ и $x^2 - 4 = c$. Тогда получаем:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+c} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + ac = ab + bc, \\ b \neq 0, \\ b + c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = b, \\ c = 0, \end{array}\right. \\ b \neq 0, \\ b + c \neq 0. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 7x - 2 = x^2 - 5x + 6, \\ x^2 - 4 = 0, \end{array}\right. \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0, \\ x^2 - 5x + 6 + x^2 - 4 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 2, \\ x = -2, \end{array}\right. \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0, \\ x^2 - 5x + 6 + x^2 - 4 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{\mathbf{-2}; \mathbf{4}\}$**.**