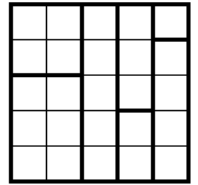


Решение вступительной олимпиады по математике. 2023. 7 класс.

1. На какое максимальное число различных прямоугольников с целыми сторонами Костя может разрезать квадрат 5×5 ?

Ответ: 7 (см. рисунок).

Решение: Рассмотрим прямоугольники с минимальными площадями: 1×1 , 1×2 , 1×3 , 1×4 , 2×2 , 1×5 , 2×3 . Уже эти 7 прямоугольников имеют общую площадь 25, а других с площадями не больше 6 не существует (кроме, разве что, 1×6 , который слишком длинный и не влезает в квадрат 5×5).



2. После модернизации компьютер увеличил скорость передачи данных на 30 Мбит/сек, что позволило загружать фотографии в 3 раза быстрее. На сколько Мбит/сек надо увеличить скорость передачи данных, чтобы можно было загружать фотографии в 7 раз быстрее?

Ответ: на 90 Мб/сек.

Решение: Пусть изначальная скорость x Мб/сек. Тогда $3x = x + 30$, откуда $x = 15$ Мб/сек. Значит, чтобы ускорить загрузку в 7 раз, надо скорость увеличить в 7 раз, то есть на $6x = 90$ Мб/сек.

3. Найдите наименьшее значение выражения: $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 4y + 2031$.

Ответ: 2023.

Решение. Преобразуем выражение, выделив три полных квадрата:

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + 2023 = (x - y)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + 2023 \geq 2023,$$

так как квадраты неотрицательны. При этом значение 2023 достигается при $x = y = 2$.

4. Лера называет число “нестройным”, если все цифры в его десятичной записи различны и идут в порядке возрастания слева направо. Каких “нестройных” чисел больше: четырёхзначных или пятизначных?

Ответ: поровну.

Решение1: Для получения n -значных нестройных чисел нужно выбрать n цифр из 9 (так как цифры идут в порядке возрастания, то 0 использовать нельзя и выбор n цифр однозначно определяет нестройное число), что можно сделать C_9^n способами. Остаётся заметить, что $C_9^4 = C_9^5$.

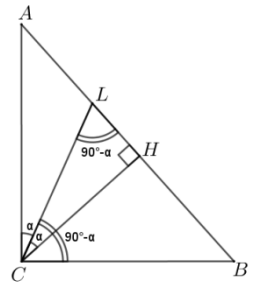
Решение2: Рассмотрим произвольное четырёхзначное нестройное число. Оставшиеся неиспользованными 5 ненулевых цифр образуют единственное нестройное пятизначное число. Значит, каждому четырёхзначному взаимно однозначно сопоставимо пятизначное, то есть их поровну.

5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена высота CH , а в треугольнике ACH проведена биссектриса CL . Найдите BC , если $AL = 3$, $LH = 2$, $HB = 4$.

Ответ: 6.

Решение:

Биссектриса CL делит угол $\angle ACH$ на два равных угла: $\angle HCL = \angle ACL = \alpha$. Тогда $\angle LCB = 90^\circ - \alpha$. Далее, из $\triangle CLH$ получаем, что $\angle CLH = 90^\circ - \alpha$. Таким образом, $\angle LCB = \angle CLB = 90^\circ - \alpha$, а значит $\triangle CLB$ равнобедренный и $CB = LB = 6$.



6. На нижней горизонтали доски размером 2×25 выстроились фишки с номерами от 1 до 25 по порядку. За один ход Юра переставляет одну фишку на пустую соседнюю по горизонтали или вертикали клетку. За какое наименьшее число ходов Юра может расставить все фишки на нижней горизонтали в обратном порядке?

Ответ: 360.

Оценка: Если бы фишки были «бесплотными» и умели проходить друг сквозь друга и стоять по нескольку на одном месте, то Юра смог бы справиться за $2 \cdot (24 + 22 + 20 + \dots + 2) = 312$ ходов (1-й и 25-й фишкам надо сделать по 24 хода, чтобы оказаться на своих местах, 2-й и 24-й – по 22 хода, и так далее). Однако они материальны, поэтому всем, кроме, может быть, одной, придётся побывать на второй горизонтали, чтобы обойти другие фишки (действительно, рассмотрим две произвольные фишки с номерами $x < y$, тогда фишке x надо оказаться правее фишки y , то есть одной из них надо уйти на другую горизонталь). На это понадобится ещё $2 \cdot 24 = 48$ ходов. Итого имеем не менее 360 ходов.

Пример: Выставим сперва почти все фишки в правильном порядке на второй горизонтали. Фишки с 1-й по 12-ю по очереди выдвинем вперёд и сдвинем направо в конец (рис. А), далее 13-ю просто выдвинем вперёд (рис. Б). Фишки с 14-й по 24-ю сперва сдвинем влево на нужное место, потом выдвинем вперёд, чтобы пропускать следующие (рис. В). Наконец, 25-ю просто сдвинем в левый край по первой горизонтали (рис. Г), после чего переставим все фишки с 1-й по 24-ю вниз.

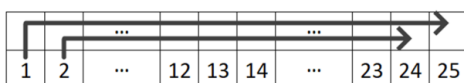


Рисунок А

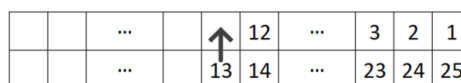


Рисунок Б

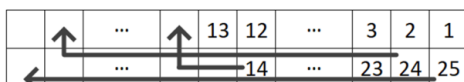


Рисунок В

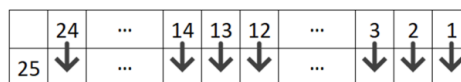


Рисунок Г