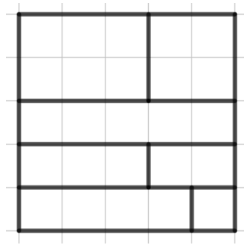
Решения вступительной олимпиады по математике. 2023. 8 класс.

1. Костя утверждает, что он придумал способ разрезать квадрат 5×5 на 7 различных прямоугольников с целыми сторонами. Прав ли Костя?



Ответ: Прав (см. рисунок).

2. Решите уравнение: $4\left(2x - \frac{1}{6}\right)^4 + 7\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 - 2 = 0$.

Ответ: $\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}$**.**

Решение: Сделаем замену переменной $t = \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2, t \geq 0$.

$4t^2 + 7t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = \frac{1}{4}. \end{array}\right.$ Так как $t \geq 0$, $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \\ 2x - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}, \\ x = -\frac{1}{6}. \end{array}\right.$

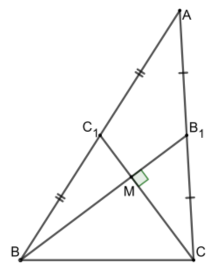
3. В классе отсутствовало $\frac{4}{7}$ учеников. После того, как один ученик вышел, в классе осталось $\frac{2}{5}$ учеников. Сколько всего учеников в классе?

Ответ: 35 учеников.

Решение: Если в классе отсутствовало $\frac{4}{7}$ учеников, значит присутствовало $\frac{3}{7}$ учеников. $\frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{1}{35}$ – доля, которую составляет 1 (вышедший) ученик. Тогда всего учеников 35.

4. В треугольнике две медианы перпендикулярны и равны 3 и 4. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 8.



Решение: Точкой пересечения медианы делятся в отношении $2:1$, считая от вершины. Пусть медианы $BB_1 = 3$ и $CC_1 = 4$ треугольника ABC пересекаются в точке M. Тогда $BM = 2$, причём отрезок BM перпендикулярен CC_1. Площадь треугольника BCC_1 равна $\frac{1}{2} \cdot BM \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$, а площадь треугольника ABC в два раза больше, так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

5. Известно, что уравнения $2023x^2 + 2022x + a = 0$ и $ax^2 + 2022x + 2023 = 0$ имеют хотя бы один общий положительный корень. Решите эти уравнения.

Ответ: Корни первого уравнения: 1 и $-\frac{4045}{2023}$**, корни второго уравнения: 1 и** $-\frac{2023}{4045}$**.**

Решение: Если x – корень обоих уравнений, то он и корень их разности $(2023 - a)x^2 + (a - 2023) = 0$, откуда получаем, что $(2023 - a)(x - 1)(x + 1) = 0$.
Если $a = 2023$, то исходные уравнения совпадают, и у них нет корней $(2022^2 - 4 \cdot 2023^2 < 0)$.
Значит, возможные общие корни 1 и (-1), значит (корень должен быть положительным), этот положительный корень равен 1.
Тогда $2023 + 2022 + a = 0$, то есть $a = -4045$. Первое уравнение имеет корни 1 и $-\frac{4045}{2023}$, второе 1 и $-\frac{2023}{4045}$.

6. Таня и Юра прогуливались по бульвару. Они начали прогулку одновременно с противоположных концов бульвара и впервые встретились в 50 метрах от его середины. Дойдя до конца бульвара, каждый немедленно разворачивался и шёл обратно с той же скоростью. Они встретились лицом к лицу еще дважды, после чего Таня догнала Юру в конце бульвара. Найдите длину бульвара.

Ответ: 700 м.

Решение: В конце пути Таня догнала Юру – значит, её скорость больше. К моменту первой встречи она прошла на 100 метров больше (он не дошёл 50 метров до середины, а она прошла на 50 метров больше половины бульвара). При этом общее расстояние, пройденное к моменту, – один бульвар.
Каждая встреча (кроме конца прогулки) – лицом к лицу. Значит, между двумя встречами каждый разворачивался, дойдя до края, а не обгонял, и к концу Таня прошла на один бульвар больше.
От встречи до встречи они вместе проходят два бульвара, накопив 200 метров разницы пройденного.
За время прогулки суммарно ребята вместе прошли $1 + 2 + 2 + 2 = 7$ бульваров. При этом разность пройденного ими с одной стороны – один бульвар, а с другой – 700 метров, таким образом, длина бульвара равна 700 метров.