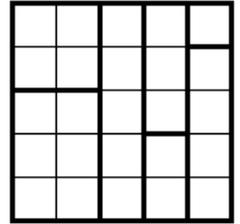


Решения вступительной олимпиады по математике. 2023. 9 класс.

1. Костя утверждает, что он придумал способ разрезать квадрат 5×5 на 7 различных прямоугольников с целыми сторонами. Прав ли Костя?

Ответ: Костя прав (см. рисунок).



2. Лёша построил график квадратичной функции $y = x^2 + px + q$ и график линейной функции $y = x + 1$. Оказалось, что они пересекаются в точках с абсциссами 2 и 3. Найдите p и q .

Ответ: $p = -4$; $q = 7$.

Решение1:

Абсциссы точек пересечения графиков – это корни уравнения

$$x^2 + px + q = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + (p - 1)x + q - 1 = 0.$$

По теореме Виета найдем p и q : $2 + 3 = -(p - 1) \Leftrightarrow p = -4$; $2 \cdot 3 = q - 1 \Leftrightarrow q = 7$.

Решение2:

Так как графики данных функций пересекаются, то верна система:

$$\begin{cases} 2^2 + 2 \cdot p + q = 2 + 1 \\ 3^2 + 3 \cdot p + q = 3 + 1 \end{cases}$$

Решим её:

$$\begin{cases} 4 + 2 \cdot p + q = 3 \\ 9 + 3 \cdot p + q = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot p + q = -1 \\ 3 \cdot p + q = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -4 \\ 2 \cdot p + q = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -4 \\ q = 7 \end{cases}$$

3. При построении восемь десятиклассников разместились так, что:

- 1) А был впереди Б и В;
- 2) Б – впереди К через одного;
- 3) Л впереди А, но после Д;
- 4) В – после Е через одного;
- 5) Д – между Б и Г;
- 6) Е – рядом с К, но впереди В.

В каком порядке выстроились десятиклассники?

Ответ: Г, Д, Л, А, Б, Е, К, В.

Решение:

Последним не может быть А (условие 1), Б (условие 2), Г (следует из условий 1, 3 и 5), Д (условие 3), Е (условие 6), К (условие 6), Л (условие 3). **Значит, последний В.**

Тогда третий с конца Е (условие 4).

К стоит рядом с ним, причем К не может быть четвертым с конца (по условиям 1, 2, 3 перед К стоят А, Б, Л, Д и тогда предпоследний Г, что противоречит условию 5). Значит (условие 6) **К – второй с конца.**

Отсюда следует, что Б – четвертый с конца (условие 2).

Из условия 3 следует, что Д впереди А и Л, а из условия 5 – что он позади Г, **значит, Д – второй.**

Тогда Г – первый (условие 5). **Наконец, Л – третий и А – четвертый** (условие 3).

Таким образом, десятиклассники выстроились в следующем порядке: Г, Д, Л, А, Б, Е, К, В.

4. Решите неравенство: $\frac{x}{x-4} - \frac{9}{x-2} \leq 2$.

Ответ: $(-\infty; -4] \cup (2; 4) \cup [5; +\infty)$.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-4} - \frac{9}{x-2} \leq 2 &\Leftrightarrow 1 + \frac{4}{x-4} - \frac{9}{x-2} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{4}{x-4} - \frac{9}{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4}{x-4} - \frac{9}{x-2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{4 \cdot (x-2) - 9 \cdot (x-4) - (x-4)(x-2)}{(x-4)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x - 8 - 9x + 36 - x^2 + 6x - 8}{(x-4)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-x^2 + x + 20}{(x-4)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 20}{(x-4)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+4)}{(x-4)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4, \\ 2 < x < 4, \\ x \geq 5. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Паше подарили старинные часы со стрелками, но выяснилось, что они спешат. С помощью точных электронных часов Паша выяснил, что часовая и минутная стрелки встречаются каждые 66 минут. На сколько минут в час спешат часы?

Ответ: 0,5 минуты в час.

Решение:

Заметим, что скорость сближения часовой и минутной стрелок на правильно идущих часах равно $330^\circ/\text{ч}$.

Тогда время между встречами равно $\frac{360}{330} = \frac{12}{11}$ ч, а у спешащих часов стрелки встречаются через 66 минут,

то есть через $\frac{66}{60} = \frac{11}{10}$ ч.

Далее, пусть за час на Пашиных часах минутная стрелка пройдет x минут, тогда получаем, что $\frac{x}{60} = \frac{11}{10} : \frac{12}{11}$; откуда $x = 60,5$ мин, то есть Пашины часы спешат на 0,5 минуты в час.

6. В треугольнике ABC известны сторона $BC = 6$ и $\angle A = 60^\circ$. Биссектриса AA_1 , медиана BB_1 и высота CC_1 пересекаются в точке O . Найдите OB .

Ответ: $OB = 2\sqrt{3}$.

Решение:

Рассмотрев $\triangle AC_1C$, получим, что $\angle ACC_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Так как AA_1 - биссектриса, то $\angle OAC = 30^\circ$.

Таким образом, $\angle OAC = \angle ACC_1 = 30^\circ$ и значит $\triangle AOC$ – равнобедренный, причём OB_1 в нём является медианой. Тогда по свойству равнобедренного треугольника OB_1 – высота, а значит и BB_1 – высота $\triangle ABC$.

Следовательно, $\triangle ABC$ – равнобедренный, так как в нём медиана совпала с биссектрисой, а значит $AB = BC = 6$.

Далее, $\angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$ по свойству углов при основании равнобедренного треугольника.

Тогда и $\angle ABC = 60^\circ$, то есть $\triangle ABC$ – равносторонний.

Получаем, что $BB_1 = 6 \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Наконец, CC_1 , являясь высотой равностороннего треугольника, является и медианой. Значит точка O – это точка пересечения медиан. Тогда по свойству пересечения медиан треугольника, получаем, что $OB = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

