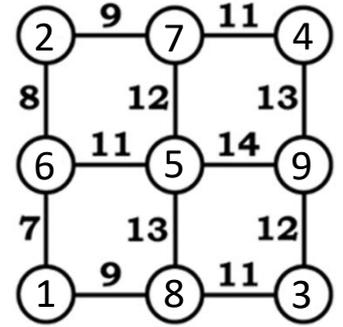


Решение вступительной олимпиады по математике. 7 класс. 2024

1. Впишите в кружочки по одному разу все цифры от 1 до 9 так, чтобы сумма любых двух соединённых отрезком кружочков равнялась числу, написанному на этом отрезке.

Ответ: см. рисунок (решение единственное).



2. Один из пяти семиклассников разбил окно. Серёжа сказал: «Это Валера или Таня». Валера сказал: «Это сделал не я и не Федя». Таня сказала: «Вы оба врётё!». Федя сказал: «Один из мальчиков сказал правду, а другой – нет». Лиза сказала: «Федя, ты не прав». Классный руководитель точно знает, что трое из её учеников всегда говорят правду. Кто разбил окно?

Ответ: Таня.

Решение:

- 1) Лиза утверждает, что Федя не прав, поэтому Лиза и Федя точно «разные» (один говорит правду, другой врёт).
- 2) Если Таня говорит правду, то врут Серёжа и Валера, тогда остальные трое учеников – Таня, Федя, Лиза – правдивые; этого не может быть, значит, Таня врёт.
- 3) Лжецов всего двое: Таня и один из Феди и Лизы, значит, Серёжа и Валера говорят правду, из чего сразу следует, что окно разбила Таня.

3. Число $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 125 \cdot 126}{20^{32}}$ записали в виде несократимой дроби. Чему равен её знаменатель?

Ответ: 5.

Решение: Разложим знаменатель на простые множители: $20^{32} = 2^{64} \cdot 5^{32}$. Хотя в числителе только 63 чётных числа, многие из них делятся на 2 более одного раза (например, число 4), поэтому двойки сократятся полностью. А вот чисел, делящихся на 5, только 25 штук (каждое пятое число), из которых 4 делятся на 25 (25, 50, 75, 100), и одно делится на 125, то есть удастся сократить только $20 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 31$ пятёрку, поэтому последний множитель 5 в знаменателе останется.

4. Мариам писала на доске подряд все натуральные числа от 1 до 2024. Сначала она писала синим маркером, но в какой-то момент, когда она написала очередное число, синий маркер закончился, и она продолжила писать красным маркером. Когда она написала все числа, то оказалось, что наименьшее красное число в 4 раза меньше количества красных чисел. Какое самое большое синее число написала Мариам?

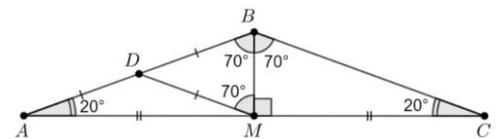
Ответ: 404.

Решение: Обозначим первое красное число за x , тогда всего красных чисел $4x$, а синих чисел $x - 1$. Тогда общее количество чисел: $2024 = (x - 1) + 4x$, откуда $5x = 2025$ и $x = 405$. Значит, самое большое синее число – это число 404.

5. В треугольнике ABC точки M и D – середины сторон AC и AB соответственно. Найдите углы треугольника ABC , если $AB = 2MD$ и угол BMD равен 70° .

Ответ: $140^\circ, 20^\circ, 20^\circ$.

Решение: $AD = BD = MD$, то есть треугольники ADM и BDM – равнобедренные, поэтому $\angle MBD = \angle DMB = 70^\circ$, откуда $\angle MDA = 140^\circ$ (как внешний угол треугольника BDM), значит $\angle BAC = \angle AMD = 20^\circ$. Таким образом, $\angle AMB = \angle BMC = 90^\circ$, а тогда $\triangle AMB = \triangle BMC$ по двум сторонам и углу между ними, то есть $\angle C = \angle A = 20^\circ, \angle ABC = 2\angle MBA = 140^\circ$.



6. Даны 10 чисел. Когда каждое из них увеличили на 1, сумма их квадратов не изменилась. Каждое число ещё раз увеличили на 1. На сколько могла измениться сумма квадратов на этот раз? Приведите все возможные варианты и докажете, что других нет.

Ответ: на 20.

Решение: Обозначим исходные числа как x_1, x_2, \dots, x_{10} . Тогда, раз после увеличения на 1 сумма квадратов не изменилась, можно записать, что разность новой и старой сумм квадратов равна 0:

$$((x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + \dots + (x_{10} + 1)^2) - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2) = 0.$$

Раскроем квадраты сумм, тогда квадраты чисел взаимно уничтожатся:

$$(x_1^2 + 2x_1 + 1 + x_2^2 + 2x_2 + 1 + \dots + x_{10}^2 + 2x_{10} + 1) - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2) = 0,$$

$$2x_1 + 1 + 2x_2 + 1 + \dots + 2x_{10} + 1 = 10 + 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) = 0.$$

Итак, сумма всех исходных чисел $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = -5$. Теперь узнаем искомую разницу, проделав то же самое с числами, увеличенными на 2 (аналогичным образом раскроем суммы квадратов и вычтем квадраты самих чисел):

$$((x_1 + 2)^2 + (x_2 + 2)^2 + \dots + (x_{10} + 2)^2) - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2) =$$

$$(x_1^2 + 4x_1 + 4 + x_2^2 + 4x_2 + 4 + \dots + x_{10}^2 + 4x_{10} + 4) - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2) =$$

$$= 4(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) + 40 = 4 \cdot (-5) + 40 = 20.$$