Решение вступительной олимпиады по математике. 8 класс. 2024

1. Сколько корней имеет уравнение $\frac{x^2-8x-3}{\sqrt{x^3+8x}}=0$?

Ответ: один корень.

Решение:

$$\frac{x^2-8x-3}{\sqrt{x^3+8x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x-3=0, \\ x^3+8x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4\pm\sqrt{19}, \\ x\cdot(x^2+8)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4-\sqrt{19}, \\ x=4+\sqrt{19}, \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4+\sqrt{19}.$$

2. Однажды за круглым столом встретились двое рыцарей и двое лжецов. На столе белой стороной вверх лежали пять карточек, на которых были написаны числа 1, 2, 3, 4 и 5. Каждый взял себе какую-то карточку, а карточку, оставшуюся на столе, повернули числом вверх. Посмотрев на свою карточку и на ту, что осталась на столе, каждый произнес фразу: «Сумма чисел на трёх ваших карточках четна». Чему равно произведение чисел на карточках рыцарей?

Ответ: 8.

Решение: Сумма чисел на всех карточках равна 15, таким образом все сказанные утверждения можно заменить на «Сумма чисел на моей карточке и карточке, лежащей на столе, нечетна». Оба лжеца лгут, поэтому каждая из их карточек имеет ту же четность, что и карточка, лежащая на столе. Четных чисел на карточках только два, значит у лжецов и на столе – карточки с нечетными числами, а рыцарям достались четные (при этом утверждения рыцарей истинны). Произведение этих чисел равно 8.

3. Костя написал в ряд несколько единиц, поставил между каждыми соседними знак «+» или «×» и получил выражение, значение которого равно 2024. Леше кажется, что если в Костином выражении заменить одновременно все знаки «+» на знаки «×», а знаки «×» на знаки «+», то всё равно получится 2024. Возможно ли это?

Ответ: возможно.

Решение: Заметим, что $\underbrace{1+1\times1+1\times1+\cdots+1\times1}_{4047\text{ единиц}}=2024$, так как $1\times1=1$ и мы складываем 2024 единицы.

Если заменить в этом выражении все знаки, то получится $\underbrace{1\times1+1\times1+\cdots1\times1+1}_{4047\text{ единиц}}$, т.е. результат не изменится.

4. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, если известно, что $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=10$.

Ответ: $5\frac{1}{5}$.

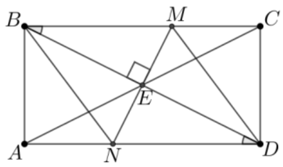
Решение:

$$\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=10 \Leftrightarrow \frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2-y^2}=10 \Leftrightarrow \frac{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}=10 \Leftrightarrow \frac{2x^2+2y^2}{x^2-y^2}=10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=5 \quad \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}=5+\frac{1}{5}=5\frac{1}{5}.$$

5. Через точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, перпендикулярная BD, которая пересекает стороны BC и AD в точках M и N соответственно. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если его площадь равна 32, а площадь четырехугольника $BMDN$ равна 20.

Ответ: $P_{ABCD}=24$.



Решение:

$\Delta BME=\Delta DNE$ (по катету и прилежащему острому углу), значит $BM=DN$. Также $BM \parallel DN$, откуда $BMDN$ – параллелограмм. Кроме того, у него перпендикулярны диагонали, значит это ромб, и $BM=MD$. Диагональ BD делит площади прямоугольника и ромба пополам, значит $S_{BMD}=\frac{1}{2}S_{BMND}=10$, $S_{MCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}-S_{BMD}=6$. CD – общая высота ΔBCD и ΔMCD, тогда $\frac{S_{BMD}}{S_{MCD}}=\frac{BM}{MC}=\frac{5}{3}$. Пусть $MC=3x$, тогда $BM=MD=5x$ и (по теореме Пифагора для ΔMCD) $CD=4x$, откуда $BC=BM+MC=8x$. $S_{ABCD}=4x\cdot8x=32x^2=32$, значит $x=1$ и $P_{ABCD}=2(4x+8x)=24$.

6. На доске написано 7 различных нечетных чисел. Таня посчитала их среднее арифметическое, а Паша упорядочил их по возрастанию и выбрал из них число, оказавшееся посередине. Может ли Танино число оказаться на $\frac{3}{7}$ больше Пашиного?

Ответ: не может.

Решение:

Предположим, что это возможно. Пусть на доске написаны числа a,b,c,d,e,f,g. Упорядочим их по возрастанию: $a<b<c<d<e<f<g$. Тогда Танино число равно $\frac{a+b+c+d+e+f+g}{7}$, а Пашино число – это число d. Из условия следует, что $\frac{a+b+c+d+e+f+g}{7}-d=\frac{3}{7}$. По предположению $a+b+c+d+e+f+g-7d=3$; $a+b+c+e+f+g=3+6d$. В левой части равенства написана сумма шести нечётных слагаемых, то есть чётное число, а справа – сумма четного с нечетным, т.е. нечётное число. Таким образом, наше предположение привело к противоречию, и Танино число не может оказаться на $\frac{3}{7}$ больше Пашиного.