Решение вступительной олимпиады по математике. 9 класс. 2024

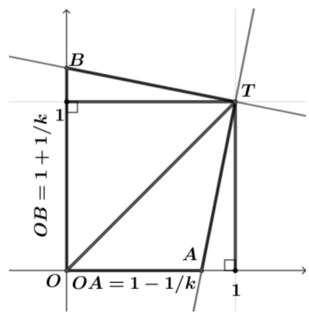
1. Решите уравнение: $x^2 - 4048x + 2024^2 = 4 + 3(x - 2024)$.
Ответ: $2023;\ 2028$.
Решение:
$x^2 - 2 \cdot 2024x + 2024^2 = 4 + 3(x - 2024) \Leftrightarrow (x - 2024)^2 - 3(x - 2024) - 4 = 0$. Пусть $t = x - 2024$, тогда:
$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2024 = -1, \\ x - 2024 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2023, \\ x = 2028. \end{array}\right.$$

2. Решите неравенство: $\frac{(x+1)(3x-2)}{x-1} < \frac{(x+1)(3x-5)}{x-2}$.
Ответ: $(-1; 1), (2; +\infty)$.
Решение:
$$\frac{(x+1)(3x-2)}{x-1} - \frac{(x+1)(3x-5)}{x-2} < 0 \Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{3x-2}{x-1} - \frac{3x-5}{x-2}\right) < 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1) \cdot \frac{(3x-2)(x-2) - (3x-5)(x-1)}{(x-1)(x-2)} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-(x+1)}{(x-1)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 1, \\ x > 2. \end{array}\right.$$

3. Придумайте три пары таких различных положительных чисел a и b, что $a^2 + 100500b = b^2 + 100500a$.
Ответ: например, $(1; 100499), (100499; 1), (2; 100498)$.
Решение: Перепишем условие: $(a^2 - b^2) - 100500(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a + b - 100500)(a - b) = 0$. Таким образом, равенство будет выполнено для любых пар различных чисел, сумма которых 100500. Примеры таких пар: $(1; 100499), (100499; 1), (2; 100498)$.

4. У Серёжи были 3 белых и 1 черный шарик, которые он положил в некоторые из 5 коробочек и сделал на них следующие правдивые надписи: «Тут нет черных шариков», «Тут есть ровно один белый шарик», «Тут нет белых шариков», «Тут ровно один шарик», «Неправда, что тут ровно один шарик». Сколько при этом коробочек могло оказаться пустыми?
Ответ: одна или две.
Решение: Вторая и четвертая коробки не пустые, но в этих двух коробках не больше двух белых шаров, а всего белых шаров три. Значит, заполнены не меньше трёх коробок. Шаров четыре, а коробок пять, значит хотя бы одна коробка пуста. Значит, пустыми могут оказаться одна или две коробки.
Приведём примеры с двумя пустыми и одной пустой коробками: (2Б, 1Б, 0, 1Ч, 0) и (1Б, 1Б, 1Ч, 1Б, 0).

5. Прямая $y = k(x - 1) + 1, k > 1$ пересекает ось Ox в точке A, прямая $y = -\frac{1}{k}(x - 1) + 1$ пересекает ось Oy в точке B. Друг с другом эти прямые пересекаются в точке T. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках A, B, T, O, где O – начало координат.
Ответ: 1.
Решение: Найдем координаты точек A, B, T.



Точка T: $k(x - 1) + 1 = -\frac{1}{k}(x - 1) + 1$, $\left(k + \frac{1}{k}\right)(x - 1) = 0$. $k + \frac{1}{k} \neq 0$, значит, $x = 1, y = 1$.
Точка A: $k(x - 1) + 1 = 0$, откуда точка $A(-\frac{1}{k} + 1; 0)$.
Точка B: $x = 0, y = -\frac{1}{k}(0 - 1) + 1 = \frac{1}{k} + 1$, откуда $B\left(0; \frac{1}{k} + 1\right)$.
$S_{OATB} = S_{OAT} + S_{OBT} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot OB \cdot 1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{k} + 1\right) = 1.$

6. Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников, на которые медиана BM разбивает прямоугольный треугольник $ABC(\angle B\ =\ 90°)$. Найдите угол O_1BO_2.
Ответ: $\angle O_1BO_2 = 90°$.
Решение: Медиана, проведённая к гипотенузе, разбивает треугольник на два равнобедренных ($MB = MC = MA$). Тогда MO_1 и MO_2 – серединные перпендикуляры и биссектрисы в треугольниках CMB и AMB. Угол O_1MO_2 прямой, так как это угол между биссектрисами смежных углов. $O_1M = O_1B$, $O_2B = O_2M$ как радиусы описанных окружностей. Значит, треугольники O_1MO_2 и O_1BO_2 равны по трём сторонам. Значит, $\angle O_1BO_2 = \angle O_1MO_2 = 90°$.