Решение вступительной олимпиады по физике. 7 класс. 2024

1. *Дельфин и рыба*

И дельфин, и рыба за 1 секунду проплывают расстояние, равное удвоенной длине своего тела; при этом у дельфина и рыбы похожая форма тела. Рыба находится на расстоянии $L = 225\,м$ от дельфина и удаляется от него со скоростью $v_p = 3\,\frac{км}{ч}$. Оцените, через какое время дельфин догонит рыбу. Масса дельфина $M = 100\,кг$, масса рыбы $m = 0{,}1\,кг$.

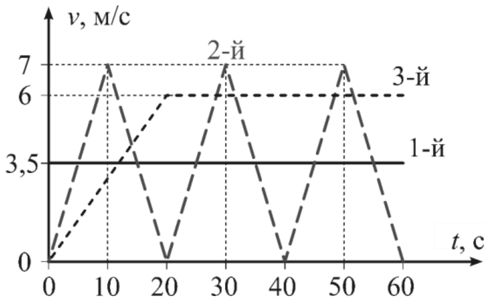
Ответ: 30 с.

Решение: Масса дельфина в $\frac{M}{m} = 1000 = 10^3$ раз больше. Плотности дельфина и рыбы примерно одинаковы (и дельфин, и рыба плывут в воде, и их плотность примерно должна быть равна плотности воды, иначе они будут самопроизвольно всплывать либо тонуть). Значит, и отношение их объемов примерно будет $\frac{V}{v} = 10^3$. При похожей форме тела отношение объемов равно кубу отношения длин, то есть $\left(\frac{l_д}{l_p}\right)^3 = \frac{V}{v} = 10^3$, откуда $\frac{l_д}{l_p} = 10$. За равные промежутки времени τ и дельфин, и рыба проходят свою удвоенную длину , то есть их скорость равна $2l/\tau$, откуда $\frac{v_д}{v_p} = \frac{l_д}{l_p} = 10 \Rightarrow v_д = 10v_p$, где скорость рыбы $v_p = 3\frac{км}{ч} = \frac{5}{6}\,\frac{м}{с}$. Время, за которое дельфин догонит рыбу:

$$t = \frac{L}{v_{отн}} = \frac{L}{v_д - v_p} = \frac{L}{9v_p} = \frac{225}{9\cdot\frac{5}{6}} = 30\ с.$$

2. *Три бегуна*

На рисунке показан график зависимости от времени скоростей трех школьников в течении минутной разминки на беговой дорожке. Все школьники стартуют одновременно из координаты ноль в одном направлении.



А) Укажите все моменты времени, когда первый школьник бежит строго впереди остальных.

Б) На какое наибольшее расстояние во время разминки второй школьник обгонял третьего?

Ответ: А) интервалы времени в секундах (0;10) и (20;24). **Б)** на 28 м.

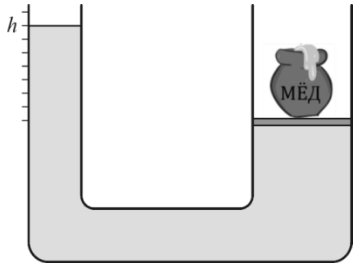
Решение: А) сравним движение первого и второго бегуна. В течении первых 10 с скорость (а потому и средняя скорость) второго бегуна все время растет, при этом за первые 10 с его пройденный путь (площадь под графиком v от t) равен пути первого, бежавшего равномерно. Значит, все 10 с второй бегун догонял первого и в этот момент догнал. Вторые 10 с второй бегун начинает со скоростью, большей скорости первого, и он все время замедляется, при этом к 20-й секунде его путь снова сравнивается с путем первого. То есть вторые 10 с второй бегун всегда впереди первого. Далее ситуация повторяется. Итак, первый бегун находится строго впереди второго в интервалы времени: (0; 10), (20; 30) и (40; 50). Сравним теперь движение первого и третьего. В момент $t = 20\ с$ третий пробегает (площадь под графиком v от t) расстояние $(6\cdot 20) : 2 = 60\ (м)$, а первый – расстояние $3{,}5\cdot 20 = 70(м)$, то есть первый впереди третьего. Рассмотрим момент $t > 20$ с, когда третий догонит первого. Напишем уравнение: $\underbrace{3{,}5t}_{путь\ 1-го} = \underbrace{60}_{путь\ 3-го\ за\ 20с} + \underbrace{6(t-20)}_{остальной\ путь\ 3-го} \Rightarrow t = 24\ (с)$. После этого момента скорость третьего больше ($6 > 3{,}5$), и он всегда впереди первого. В итоге, первый впереди всех в интервалы времени в секундах (0;10) и (20;24).

Б) Максимально второй обгоняет третьего на *первом* участке, пока между 10 и 20 секундой их скорости не сравняются. После этого скорость третьего становится больше скорости второго, он сначала догоняет, потом обгоняет и, несложно посчитать, что и через 30 с путь третьего ($60 + 6(30-20) = 120$ м) больше пути второго ($\frac{1}{2}(7\cdot 20) + \frac{1}{2}(7\cdot 10) = 105$ м), а далее каждые 10 с средняя скорость второго (3,5 м/с) меньше скорости третьего (6 м/с), то есть третий все время впереди.

Пусть момент совпадения скоростей (первого пересечения графиков второго и третьего) равен T, тогда выразим скорости второго и третьего и приравняем их. Третий бегун за 20 с набирает скорость 6 м/с, значит, набирает каждую секунду скорость $\frac{6}{20}$ м/с, и через T с третий набирает скорость $v_3 = \frac{6}{20}T$. Второй бегун снижает скорость с 7 м/с до 0 м/с за вторые 10 с, то есть на $\frac{7}{10}$ м/с за каждую секунду, а за $(T-10)$ с снизит скорость на $\frac{7}{10}(T-10)$ м/с. Значит, скорость второго станет $v_2 = 7 - \frac{7}{10}(T-10)$. $v_2 = v_3 \Rightarrow \frac{6}{20}T = 7 - \frac{7}{10}(T-10) \Rightarrow T = 14\ (с)$. Скорости бегунов в этот момент $v_2 = v_3 = \frac{6}{20}\cdot 14 = 4{,}2\,\frac{м}{с}$. Разность площадей под графиками второго и третьего легко вычисляется:

$$\frac{1}{2}(7\cdot 20) - \frac{1}{2}(4{,}2\cdot 20) = 28\,м.$$

3. *Винни-Пух взвешивает мёд*



У Винни-Пуха был «вкусный взвешиватель», то есть заполненная сладким сиропом плотности $\rho_c = 1{,}2\ г/см^3$ трубка с делениями, сообщающаяся с сосудом, закрытом легким поршнем. Когда поршень был никак не нагружен, уровень сиропа стоял на отметке 0. После этого Винни-Пух поставил на взвешиватель горшочек с мёдом, и уровень сиропа оказался на некоторой отметке h (см. рис.). Винни подумал и «улучшил» взвешиватель, то есть выпил из трубки и сосуда весь сироп и налил на его место такой же объем воды ($\rho_в = 1\ г/см^3$), а затем повторил взвешивание.

А) Повысился или опустился уровень жидкости в трубке? Обоснуйте ответ.

Б) После этого Винни-Пух в задумчивости съел 3/4 всего мёда в горшочке. К его удивлению, граница жидкости в трубке снова оказалась на отметке h. Сколько меда съел Винни-Пух, если масса пустого горшочка $m = 800\ г$?

Ответ: А) уровень h воды в трубке повысится; **Б)** 171,5 г.

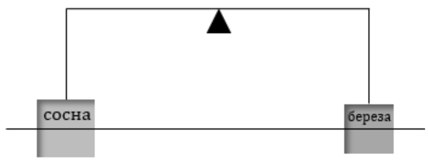
Решение: А) В начале (сообщающиеся сосуды) уровни жидкости в левой трубке и правом сосуде были равны (отметка 0). Пусть $H -$ расстояние, на которое опустится поршень в правом сосуде. Тогда избыточное давление, создаваемое снизу жидкостью на поршень, будет определяться разностью уровней $P = \rho g(h + H)$, а сила, действующая на поршень равна: PS (где S – площадь сосуда справа). Она уравновешивает силу тяжести горшочка и меда $(m + M)g$. Итак: $\rho g(h + H)S = (m + M)g\ (*)$.

«Улучшение», то есть замена сиропа на воду, уменьшит плотность ρ, и потому разность уровней $h + H$ для сохранения баланса должна возрасти, значит уровень h воды в трубке повысится.

Замечание: объем поднявшейся воды слева равен объему вытесненной воды справа, то есть: $hs = HS$ (где s – площадь трубки слева) , поэтому величины h и H пропорциональны и рост $h + H$ означает рост h.

Б) Когда сироп заменился на воду, но уровни остались те же, величина H тоже не изменится, но в уравнении (1) плотность ρ заменится на ρ_0 – плотность воды, а масса меда M заменится на оставшуюся после размышлений Винни Пуха $\frac{1}{4}M$. Итак: $\rho_0 g(h + H)S = \left(m + \frac{1}{4}M\right) g\ (**)$. Поделив $(*)$ на $(**)$, получим $\frac{\rho}{\rho_0} = 1{,}2 = (m + M)\ /\ \left(m + \frac{1}{4}M\right)$, откуда $M = \frac{2}{7}m$. Тогда Винни съел $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}m = \frac{3}{14}m \approx 171{,}5$ г.

4. *Равновесие кубиков*



На лёгком рычаге с отношением плеч $3 : 2$ уравновесили два деревянных кубика. На коротком плече подвесили кубик из сосны, а на длинном – кубик из карельской берёзы. Затем кубики на половину их объема погрузили в некоторую жидкость, а точку опоры сместили в центр рычага, для сохранения равновесия (см. рис.). Определите плотность этой жидкости. Известно, что плотность сосны $\rho_1 = 500\ кг/м^3$, плотность карельской берёзы $\rho_2 = 750\ кг/м^3$.

Ответ: $600\frac{кг}{м^3}$.

Решение: Пусть плотность неизвестной жидкости равна ρ, объемы кубиков: из сосны $- V_1$, из березы $- V_2$, их массы -- m_1 и m_2, а плечи рычага были равны $2L$ и $3L$, а стали (равными между собой) $2{,}5L$ и $2{,}5L$. Правило рычага до погружения в воду: $m_1 g \cdot 2L = \rho_1 V_1 g \cdot 2L = \rho_2 V_2 g \cdot 3L = m_2 g \cdot 3L\ (*)$. После погружения в воду на половину объема каждого появятся силы Архимеда: $(m_1 g - F_{A1}) \cdot 2{,}5L = (\rho_1 V_1 g - \frac{1}{2}\rho\, V_1 g) \cdot 2{,}5L = (\rho_2 V_2 g - \frac{1}{2}\rho\, V_2 g) \cdot 2{,}5L\ (**)$. Из уравнения $(*)$ получим $V_1 = \frac{3\rho_2}{2\rho_1} \cdot V_2 = \frac{9}{4}V_2$, и подставив в уравнение $(**)$, получим $\frac{9}{4}\left(\rho_1 - \frac{1}{2}\rho\right) = \rho_2 - \frac{1}{2}\rho$, откуда $\frac{9}{4}\rho_1 - \rho_2 = \frac{5}{8}\rho$ плотность жидкости $\rho = \frac{8}{5} \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot 500 - 750\right) = 600\frac{кг}{м^3}$.