Решение вступительной олимпиады по математике. 7 класс. 2026

1. Придумайте натуральное число, которое можно прибавить к $2025 \cdot 2026 \cdot 2027$, чтобы получить куб натурального числа.

Ответ: например, число 2026.

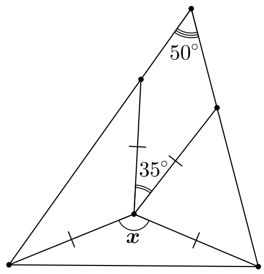
Решение: $2025 \cdot 2026 \cdot 2027 = 2026(2026^2 - 1) = 2026^3 - 2026$. Можно прибавить число 2026 и получится куб числа 2026.

2. У Кати есть восемь одинаковых жёлтых кубиков размером $1 \times 1 \times 1$. Она хочет сложить их вместе, чтобы получился кубик $2 \times 2 \times 2$, полностью жёлтый снаружи. Юра хочет покрасить некоторые грани кубиков $1 \times 1 \times 1$ (не обязательно каждого) в фиолетовый цвет. Какое наименьшее количество граней ему нужно раскрасить, чтобы Катя не смогла сделать свой кубик $2 \times 2 \times 2$ полностью жёлтым снаружи?

Ответ: 2 грани.

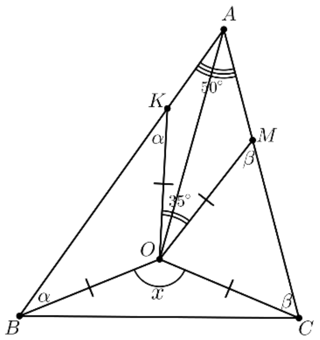
Решение: одной грани не хватит (Катя может поместить ее внутрь), а двух достаточно: у одного из кубиков нужно покрасить две противоположные грани, тогда как бы Катя не складывала кубик, одна из них точно будет снаружи и кубик не будет полностью желтым снаружи.

3. Найдите угол x на рисунке



Ответ: $135°$.

Решение: введем обозначения для точек как показано на рисунке. Пусть углы при основании равнобедренного треугольника BKO равны α, а углы при основании равнобедренного треугольника CMO равны β. Поскольку $\angle OKB = \alpha$ является внешним для треугольника OKA, а $\angle OMC = \beta$ является внешним для треугольника OMA, то по теореме о внешнем угле:



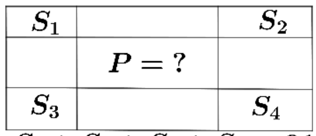
$$\alpha + \beta = \angle KAO + \angle KOA + \angle MAO + \angle MOA = \angle MOK + \angle MAK = 85°.$$

Сумма всех углов с вершиной O равна $360°$, то есть

$$180° - 2\alpha + 180° - 2\beta + 35° + x = 360°,$$

откуда $x = 135°$.

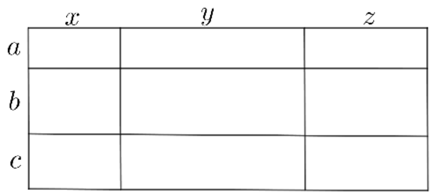
4. Из девяти прямоугольников с целочисленными сторонами сложили прямоугольник периметра 120, как показано на рисунке. Оказалось, что сумма площадей четырёх прямоугольников, стоящих в углах, равна 91. Найдите периметр центрального прямоугольника.



$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 91$

Ответ: 80.

Решение: обозначим отрезки так, как показано на рисунке.



Из условия получаем, что $ax + az + xc + cz = (a + c)(x + z) = 91$. Поскольку в каждой скобке написана сумма двух натуральных чисел, то оба получившихся сомножителя не меньше 2, поэтому равенство может выполняться только если один из сомножителей равен 7, а второй 13. Отсюда получаем, что $a + c + x + z = 7 + 13 = 20$. В то же время по условию $2(a + b + c + x + y + z) = 120$. Из этих двух равенств получаем, что $b + y = 40$, то есть периметр внутреннего прямоугольника равен 80.

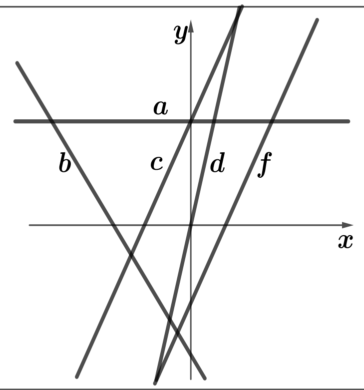
5. На остановке останавливаются автобусы №3, №4 и №5, причём автобус №3 ходит каждые 3 минуты, автобус №4 – каждые 4 минуты, а автобус №5 – каждые 5 минут. Аня заметила, что на остановку приходило по одному автобусу в 10:00, 10:01, 10:02, 10:03 и 10:05. Какой был номер у автобуса, приехавшего в 10:05, и почему?

Ответ: автобус №4.

Решение: В 10:00, в 10:01 и в 10:02 приехали три разных автобуса (разница меньше 3 минут). Аналогично с автобусами в 10:01, 10:02 и 10:03. Значит, автобусы в 10:00 и 10:03 имеют одинаковый номер и это №3. Больше автобус №3 в промежуток с 10:00 до 10:05 не останавливался, поэтому в 10:01, 10:02 и 10:05 приезжали автобусы №4 и №5. За это время не могли приехать два автобуса №5, поэтому дважды приехал автобус №4. Он не мог приехать в 10:02 (тогда автобус №4 приехал бы только один раз), поэтому он приехал в 10:01 и 10:05.

6. Костя нарисовал (правильно) десять прямых, уравнения которых были написаны на доске. Петя стёр пять из них, осталась вот такая картинка (прямые c и f параллельны). а) Заполните таблицу. б) Подробно объясните свой выбор.

1. $y = 1,5x + 3$;
2. $y = -1,5x - 2,5$;
3. $y = 1,5x - 2,5$;
4. $y = 2$;
5. $y = 4x$;
6. $y = 2x - 1,5$;
7. $y = -1,5x - 1,5$;
8. $y = 3$;
9. $y = 2x + 2$;
10. $y = -2x + 2$.



прямая	a	b	c	d	f
уравнение					

Ответ:

прямая	a	b	c	d	f
уравнение	**4**	**2**	**9**	**5**	**6**

Решение: Прямые c и f имеют одинаковый угловой коэффициент, поэтому это либо прямые с номерами 1 и 3, либо прямые с номерами 9 и 6.
Если это прямые с номерами 1 и 3, то прямая f пересекает ось OY в точке $y = -2{,}5$ и, судя по уравнениям, в самой нижней точке оси OY (остальные прямые пересекают выше этой точки или в ней), но на картинке есть прямая b, которая пересекает ось OY еще ниже, получаем противоречие.
Тогда прямые c и f – это прямые с номерами 9 и 6, прямая c пересекает ось OY в точке $y = 2$, значит прямая a – это прямая с номером 4. Наконец, прямая d проходит через точку $(0; 0)$, а такая прямая среди данных только одна – прямая с номером 5.