Решение вступительной олимпиады по математике. 8 класс. 2026

1. Вероника решает 56 задач на 1 час быстрее, чем Настя. При этом Вероника за один час решает на одну задачу больше Насти. Сколько задач за час может решить Настя?

Ответ: 7.

Решение: Пусть Вероника решила 56 задач за n часов, тогда Настя за это же время решила $56 - n$ задач (ведь она отставала на одну задачу каждый час). С другой стороны, еще через час она тоже решит 56 задач, значит за этот час она успеет решить ровно n задач. Вероника за час решает на одну задачу больше Насти, то есть $n + 1$ задачу, а за n часов она решает $n(n + 1)$ или 56 задач. У уравнения $n(n + 1) = 56$ два корня: 7 и -8, но по смыслу задачи нам подходит только положительный, причем $n = 7$ – это и есть количество задач, которые решает Настя за час.

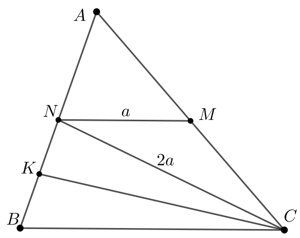
2. Сумма двух натуральных чисел – это трёхзначное число, оканчивающееся на 27. Первое число оканчивается на ноль, а если этот ноль стереть, то получится второе число. Найдите эти числа.

Ответ: 570 и 57.

Решение: Двузначным большее число быть не может, так как тогда максимальная сумма будет $90 + 9$ – меньше 100. Пусть большее число записано цифрами $A, B, 0$. То есть, $\overline{AB0} + \overline{AB} = \overline{X27}$ (черту сверху используют, чтобы показать, что это не произведение, а запись цифрами). Тогда $B = 7$, $A + B = 2$ (невозможно) или $A + B = 12$, $A = 5$. $570 + 57 = 627$ – трёхзначное число.

Можно было записать иначе: $a \cdot 10 + a = x \cdot 100 + 27$, $11a = 100 \cdot x + 27$ (x – цифра), затем перебрать все трёхзначные, оканчивающиеся на 27 и кратные 11, числа. Либо воспользоваться признаком делимости на 11 – сумма первой и последней цифр за вычетом средней должна делится на 11. То есть, $x + 7 - 2 = x + 5$ делится на 11, а такая цифра только 6.

3. В треугольнике ABC провели медианы BM и CN. Точка K – середина BN. Найдите угол AKC, если известно, что $CN = 2MN$.



Ответ: 90°.

Решение: $BC = 2MN$, так как MN средняя линия. Тогда $BC = CN$. Треугольник BCN равнобедренный, CK – медиана, значит, и высота. Тогда угол AKC – прямой.

4. Сократите дробь $\frac{6xy-5y+6x-5}{5y-5xy+2-2x} : \frac{y^2-1}{x^2-1}$.

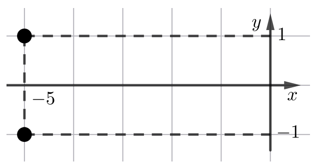
Ответ: $-\frac{6x^2+x-5}{5y^2-3y-2}$.

Решение: $\frac{6xy-5y+6x-5}{5y-5xy+2-2x} : \frac{y^2-1}{x^2-1} = \frac{(6x-5)(y+1)}{(x-1)(-5y-2)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(y-1)(y+1)} = \frac{(6x-5)}{(-5y-2)} \cdot \frac{(x+1)}{(y-1)} = -\frac{6x^2+x-5}{5y^2-3y-2}$.

5. Изобразите множество точек на плоскости, таких что $(x^2 + 4x - 5)^2 + (x + y^2 + 4)^2 = 0$.

Ответ: Две точки $(-5; 1)$ и $(-5; -1)$.

Решение: Сумма квадратов чисел равна нулю, только если каждое число равно нулю. Отсюда $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x = 1$ или $x = -5$. Найдем, когда при таких x второе выражение обращается в ноль. $1 + y^2 + 4 = 0$ – никогда. $-5 + y^2 + 4 = 0$ при $y = \pm 1$.



6. Решите уравнение $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x - \frac{1}{x}\right) = 1$.

Ответ: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}; -\frac{1}{2}; 2$.

Решение: Сделаем замену $t = x - \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$. Уравнение принимает вид $2(t^2 + 2) - 5t - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 3 = 0$. Корни $t = 1$ и $t = \frac{3}{2}$.

Сделаем обратную замену: $x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ или $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ или $x = 2$.