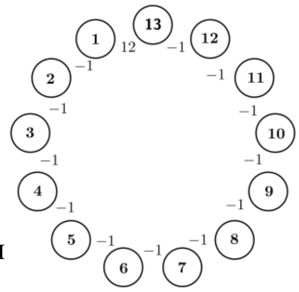
Решение вступительной олимпиады по математике. 9 класс. 2026

1. Числа $1, 2, \ldots, 13$ расставляют по кругу, находят все разности между числом и следующим за ним по часовой стрелке, и все эти разности перемножают. Можно ли добиться того, чтобы полученное произведение было положительным?



Ответ: да, можно**.**

Решение: Например, если расставить числа как показано на рисунке, то двенадцать разностей будут равны -1, а последняя будет равна 12. Тогда получится положительное произведение: $(-1)^{12} \cdot 12 = 12$. Существуют и другие примеры.

2. Из поселка на станцию, расстояние до которой 27 км, отправляются одновременно Катя пешком и Лена на велосипеде, причем скорость Лены на 10 км/ч больше скорости Кати. Прибыв на станцию, Лена сразу повернула обратно и встретила Катю через 2 часа 24 минуты после выезда из поселка. На каком расстоянии от поселка произошла встреча?

Ответ: 15 км.

Решение: <u>1 способ:</u> За время движения (2 часа 24 минуты – это 2,4 часа) Лена проехала на $10 \cdot 2{,}4 = 24$ километра больше, чем прошла Катя. Если Катя прошла x км, то Лена проехала $27 + (27 - x) = 54 - x$ км. Получаем уравнение $54 - x = x + 24$, откуда $x = 15$ км, а это и есть растояние от поселка до места встречи.
<u>2 способ:</u> Представим процесс как движение навстречу друг другу, причем расстояние между ними в начале 54 км. Время до встречи $2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$ часа. Скорость сближения $54 : \frac{12}{5} = \frac{45}{2}$ км/ч. Пусть скорость Кати равна v км/ч. Тогда скорость сближения $2v + 10 = \frac{45}{2} \Rightarrow v = \frac{25}{4}$ км/ч. Катя прошла $\frac{25}{4} \cdot \frac{12}{5} = 15$ км.

3. Решите уравнение $(x^2 + 3x + 1)^2 + 3(x^2 + 3x + 1) + 2 = 0$.

Ответ: $-1; -2$.

Решение: Уравнение квадратное относительно $x^2 + 3x + 1$, его корни легко угадываются. Получаем два уравнения: $x^2 + 3x + 1 = -1$ или $x^2 + 3x + 1 = -2$. Второе не имеет корней, первое имеет корни -1 и -2.

4. Найдите произведение всех корней уравнения

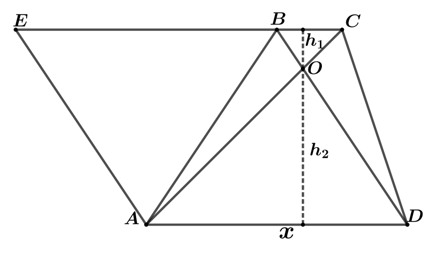
$$(30x^2 + 239x + 566)(239x^2 + 566x + 30)(566x^2 + 30x + 239) = 0$$

Ответ: $\frac{30}{239}$.

Решение: Рассмотрим дискриминанты квадратных уравнений соответствующих скобок.
$D_1 = 239^2 - 4 \cdot 30 \cdot 566 < 240^2 - 240 \cdot 283 < 0$,
$D_2 = 566^2 - 4 \cdot 239 \cdot 30 > 566^2 - 239^2 > 0$,
$D_3 = 30^2 - 4 \cdot 566 \cdot 239 < 30^2 - 100^2 < 0$.
Первая и последняя скобки не обращаются в ноль, средняя имеет два корня. По теореме Виета, произведение корней этой скобки равно $\frac{30}{239}$.

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O. На продолжении CB за точку B отмечена точка E так, что $BE = AD$. Найдите длину AD, если известно, что $BC = 1$, а площадь четырехугольника $AECD$ в 15 раз больше площади треугольника BOC.

Ответ: $AD = 2$.



Решение: Пусть $AD = BE = x$, высота треугольника BOC равна h_1, высота треугольника AOD равна h_2, тогда расстояние между параллельными прямыми AD и BC – это $h_1 + h_2$. Заметим, что $\frac{h_2}{h_1} = \frac{x}{1} = x$ из подобия треугольников BOC и AOD.
$S_{AECD} = \frac{1}{2}(AD + CE) \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2}(2x + 1) \cdot (h_1 + h_2)$.
$S_{BOC} = \frac{1}{2} h_1 \cdot BC = \frac{1}{2} h_1$.
По условию, $\frac{1}{2}(2x + 1) \cdot (h_1 + h_2) = \frac{15}{2} h_1$. Разделим обе части на $\frac{h_1}{2}$, учтём $\frac{h_2}{h_1} = x$:

$$(2x + 1) \cdot (1 + x) = 15 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -\frac{7}{3}. \end{array}\right.$$

Отрицательной длина отрезка быть не может, значит $AD = x = 2$.

6. Решите неравенство $\frac{2x^2-3x-3}{\sqrt{2x^2-3x-2}+1} \geq \frac{1}{\sqrt{3}-2}$.

Ответ: $(-\infty; -0{,}5], [2; +\infty)$.

Решение: <u>1 способ.</u> Преобразуем правую часть: $\frac{1}{\sqrt{3}-2} = \frac{\sqrt{3}+2}{3-4} = -2-\sqrt{3}$. Пусть $t = \sqrt{2x^2-3x-2} \geq 0$.

Получаем неравенство $\frac{t^2-1}{t+1} \geq -(2+\sqrt{3}), t-1 \geq -(2+\sqrt{3}), t \geq -1-\sqrt{3}$, что верно при всех допустимых значениях переменной. Найдем их, решив неравенство $2x^2-3x-2 \geq 0$. Получаем $(-\infty; -0{,}5] \cup [2; +\infty)$.

<u>2 способ.</u> Оценим левую и правую части неравенства. Правая часть: $\frac{1}{\sqrt{3}-2} = -(2+\sqrt{3}) < -1$.

Для оценки левой части отметим $0 < \frac{1}{\sqrt{2x^2-3x-2}+1} \leq 1$. Если числитель левой части положителен, то неравенство выполнено.

Если нет, то из неотрицательности подкоренного выражения $2x^2-3x-2$ следует, что $2x^2-3x-3 \geq -1$.

Тогда $\frac{2x^2-3x-3}{\sqrt{2x^2-3x-2}+1} \geq -1 > -(2+\sqrt{3})$.

Таким образом, это неравенство выполнено на всей области определения, то есть если x – любое число из множества $(-\infty; -0{,}5] \cup [2; +\infty)$.