

## ВВЕДЕНИЕ

В данной брошюре приведены условия задач, предлагавшихся на вступительных испытаниях в 10 и 9 классы (в 9 класс набор производился только в 2003, 2004 и 2006 годах) Лицея "Физико-техническая школа" при ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН.

Некоторые задания являются нестандартными, по своему духу близкими к олимпиадным. Кроме этого, вы найдете и задачи, проверяющие степень обученности школьников.

Авторы рекомендуют не решать задачи подряд, а предварительно попытаться разбить их тематически (например, геометрические, логические, уравнения, неравенства, делимость, графики и т.п.).

В составлении и подборе задач в разные годы принимали участие учителя Лицея ФТШ: Ануфриев М.Ю., Беккер Б.М., Бирман Я.Д., Боревич А.З., Зарембо А.Г., Логунова Т.А., Пульцин Н.М., Рыжик В.А., Столбов К.М., Тарасов А.А. и другие.

Компьютерный вариант сборника подготовлен Американцевым А.А.

## Задачи вступительных работ в 10 класс

1988 год

1. Доля блондинов среди голубоглазых больше, чем их доля среди всего населения. Будет ли доля голубоглазых среди блондинов больше, чем их доля среди всего населения?
2. Укажите две первые цифры числа  $\sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}$ .
3. В выпуклом четырехугольнике проведены средние линии. Площади трех образовавшихся четырехугольников равны соответственно 1, 2, 3. Чему равна площадь четвертого четырехугольника?

1989 год

1. Через точку  $A$  пересечения двух окружностей проведена прямая, которая пересекает окружность в точках  $B$  и  $C$ . При каком положении прямой отрезок  $BC$  имеет наибольшую длину?
2. Решите уравнение:  $(x-1)\sqrt{x} = 2\sqrt{3}$ .
3. При каких значениях  $a$  неравенства  $\frac{ax^2(x-1)}{x^2(x+2)} \leq 0$  и  $\frac{a(x-1)}{x+2} \leq 0$  имеют одни и те же решения?
4. Вычислите:  $\cos \frac{180^\circ}{n} + \cos \frac{2 \cdot 180^\circ}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1) \cdot 180^\circ}{n}$ .
5.  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ ,  $a + b + c \neq 0$ . Докажите, что  $a = b = c$ .

## 1990 год

1.  $a$  и  $b$  – разные положительные числа. Какое из чисел больше:  $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$  или  $\sqrt{ab}$ ?
2. Найдите одну из величин: а) острый угол  $\alpha$ ; б)  $\sin \alpha$ ; в)  $\cos \alpha$ , – если известно, что  $4 \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = 1$ .
3. Среди чисел  $12^m - 5^n$ , где  $m$  и  $n$  – натуральные числа, найдите наименьшее положительное число.
4. В трапеции один из углов равен  $35^\circ$ , а отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности этих оснований. Найдите другой угол при том же основании трапеции.
5. Может ли произведение 4 последовательных натуральных чисел быть квадратом натурального числа?
6. Число 13 можно двумя различными способами представить в виде суммы трех натуральных чисел так, чтобы 6 чисел в этих представлениях были различны:  $13 = 1 + 2 + 10$ ,  $13 = 3 + 4 + 6$ . Докажите, что число 500 нельзя представить 111 способами в виде суммы трех натуральных чисел так, чтобы все 333 числа в этих представлениях были различны.

## 1991 год

1. Какое число больше:  $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$  или  $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$ ?
2. Чему равен угол  $\alpha$ , если  $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$ ?
3. Одно из оснований трапеции на 4 больше другого. Углы при меньшем основании равны  $162^\circ$  и  $108^\circ$ . Может ли высота такой трапеции быть больше, чем 2?
4. Расстояние от  $A$  до  $B$  составляет половину расстояния от  $B$  до  $C$ . Путь  $AB$  автомобиль проехал со скоростью  $40$  км/ч.
  - а) С какой скоростью автомобиль должен ехать по пути  $BC$ , чтобы его средняя скорость на  $AC$  равнялась  $60$  км/ч?
  - б) Можно ли увеличить скорость на участке  $BC$ , чтобы средняя скорость на  $AC$  была больше  $100$  км/ч? Больше  $200$  км/ч?
5. Все члены бесконечной арифметической прогрессии – натуральные числа и ни один из них не является кубом натурального числа. Найдите хоть одну такую прогрессию. Обобщите задачу.

## 1992 год

1. Известно, что  $\sin \alpha = 1 - 3 \cos \alpha$  и  $\cos \alpha \neq 0$ . Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ .
2. Две стороны треугольника равны  $6 \text{ см}$  и  $8 \text{ см}$ , а две его медианы пересекаются под прямым углом. Найдите третью сторону треугольника.
3. Найдите наименьшее число, являющееся решением неравенства  $\sqrt{x^3 - 2x + 1} \leq 3x - x^2 - 2$ .
4. Три ромба на плоскости имеют попарно общие стороны. Величины всех их углов кратны  $30^\circ$ , а все их стороны имеют длину 1. Какие значения может принимать площадь фигуры, являющейся объединением всех трех ромбов?
5. Два человека, у которых есть один велосипед, должны попасть из пункта  $A$  в пункт  $B$ , находящийся в  $40 \text{ км}$  от  $A$ . Первый передвигается пешком со скоростью  $4 \text{ км/ч}$ , а на велосипеде – со скоростью  $30 \text{ км/ч}$ . Второй – пешком со скоростью  $6 \text{ км/ч}$ , а на велосипеде – со скоростью  $20 \text{ км/ч}$ . За какое наименьшее время они могут добраться в пункт  $B$ ? (Велосипед можно оставлять без присмотра.)

## 1993 год

1. Какое число больше:  $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$  или  $\sqrt[3]{2}$ ?
2. Найдите остаток при делении многочлена  $x^{100} + 2x^{99} - 3x^3 + 2x + 5$  на многочлен  $x^2 + x - 2$ .
3. Сколько решений в зависимости от  $a$  имеет система уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y - a = |x| \end{cases} ?$$
4. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  в 8 часов выходит скорый поезд. В этот же момент из  $B$  в  $A$  выходят пассажирский и курьерский поезда, причем скорость пассажирского поезда в 2 раза меньше скорости курьерского. Скорый поезд прибывает в пункт  $B$  в 13 часов 50 минут того же дня, а встречает курьерский поезд не ранее 10 часов 30 минут утра. Найдите время прибытия пассажирского поезда в пункт  $A$ , если известно, что между моментами встреч скорого поезда с курьерским и скорого с пассажирским проходит не менее часа.

5. Вокруг треугольника  $ABC$ , в котором  $BC = 2$ , а углы  $B$  и  $C$  соответственно равны  $105^\circ$  и  $15^\circ$ , описана окружность. Биссектриса угла  $A$  пересекает окружность в точке  $K$ . Найдите длину  $AK$ .
6. Найдите все натуральные числа  $n > 1$ , для которых число  $1! + 2! + \dots + n!$  является квадратом целого числа. ( $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ )

**1994 год**

1. Может ли число вида  $\frac{5^n - 1}{4^n - 1}$  ( $n$  – натуральное число) быть натуральным?
2. а) Сколько есть точек внутри правильного шестиугольника, из которых все его стороны видны под равными углами?  
 б) Из некоторой точки внутри выпуклого шестиугольника все его стороны видны под равными углами. Является ли он правильным, если у него все стороны равны? Если у него все углы равны?  
 в) Обобщите полученные в пунктах а) и б) результаты.
3. В каких границах лежит отношение двузначного числа к сумме его цифр?
4. а) Нарисуйте примерный график уравнения  $x^4 + y^4 = 1$ .  
 б) Какая его точка ближе всего к началу координат? Дальше всего?
5. Из пункта  $A$ , расположенного на одном берегу реки, перпендикулярно этому берегу отправился катер. Добравшись до противоположного берега, он затем повернул обратно и, выдерживая один и тот же курс, вернулся в пункт  $A$ . Ширина реки –  $1$  км, скорость катера –  $15$  км/ч, скорость течения –  $3$  км/ч.  
 а) Какое расстояние преодолел катер?  
 б) Какой путь: из пункта  $A$  до другого берега или обратно, – он преодолел быстрее?  
 в) Под каким углом к берегу двигался катер на пути обратно?  
 (Вместо угла можно указать тригонометрическую функцию этого угла.)

## 1995 год

1. Является ли число 400000500006000700809 квадратом натурального числа?
2. Решите уравнение:  $\sqrt{x^2 - 7} + \sqrt{x^2 - 15} + \sqrt{x^2 - 16} = \frac{16}{x}$ .
3. Решите уравнение:  $\cos^{1956} x + \sin^{1948} x = 1$ .
4. Решите неравенство:  $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} - \sqrt{x^2 + x + 4}} > 0$ .
5. Решите уравнение:  $\sqrt{8 \left[ \sqrt[3]{x} \right]} - x^2 = x$ , где  $[t]$  – наибольшее целое число, не превосходящее  $t$  (целая часть числа).
6. В трапеции  $ABCD$  ( $BC$  и  $AD$  основания)  $O$  – точка пересечения диагоналей. Площадь треугольника  $\triangle AOD = S$ ; площадь треугольника  $\triangle BOC = T$ . Найдите площадь трапеции.

## 1996 год

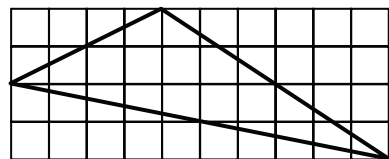
1. По горизонтальной прямой слева направо движется отрезок. Левый его конец движется со скоростью  $v_1$ , правый – со скоростью  $v_2$ . С какой скоростью движется середина отрезка?
2. В прямоугольнике, не являющемся квадратом, длины сторон – целые числа, а численные значения площади и периметра равны между собой. Найдите длины сторон этого прямоугольника.
3. а) Докажите, что  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  для всех  $x > 0$ .  
б) Какое наименьшее значение принимает выражение  $2x + \frac{8}{x}$  на промежутке  $(0, +\infty)$ .
4.  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ,  $g(x) = f(-f(x))$ . Найдите множество значений  $g(x)$ .
5. Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  – длины сторон треугольника. Докажите или опровергните неравенства:  
а)  $S > \frac{5}{33}(a^2 + b^2 + c^2)$ ;  
б)  $S > \frac{5}{33}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

## 1997 год

1. Что больше:  $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$  или 1?
2. Решите неравенство:  $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 > 0$ .
3. В двух комнатах находятся 29 кошек. Число кошек в первой комнате, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число кошек во второй комнате. Устроенное число кошек в первой комнате превышает удвоенное число кошек во второй комнате, но менее чем на 60. Сколько кошек в каждой комнате?
4. Сколько раз встретится цифра 9 в десятичной записи числа  $\underbrace{(99\dots998)}_{101 \text{ цифра}}^2$ ?
5. а) Из точки  $A$ , лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая. Пусть  $M$  – точка касания, а  $B$  и  $C$  – точки пересечения секущей с окружностью. Докажите, что  $AB^2 = AM \cdot AC$ .  
б) Окружность делит каждую сторону треугольника на три равные части. Найдите углы треугольника.
6. Решите уравнение:  $\left(x + \frac{1}{x}\right)(2 + \sin y) = 2$ .

## 1998 год

1. Решите неравенство:  $(1-x)\sqrt{x+2} \geq 0$ .
2. Решите уравнение:  $\sqrt{8x-15} = 5-2x$ .
3. В окружность вписан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ , причем  $CD$  – диаметр окружности. Докажите, что угол  $\angle CBA$  – тупой.
4. Что больше:  $2 \cdot \cos 61^\circ$  или 1?
5. Найдите наибольшее значение функции  $y = x^2 - 6x + 8$  на отрезке  $[1, 6]$ .
6. Упростите выражение:  $f(x) = \frac{\sqrt{x^{-1}} \cdot |3x^2 + x|}{\sqrt{9x^5 + 6x^4 + x^3}}$ .
7. Найдите площадь треугольника, если длина стороны одной клеточки равна 1.
8. Могут ли 6 прямых иметь 20 точек пересечения?



9.  $f(x) = |x-1| + 2$ . Какие значения может принимать функция  $g(x)$ , если  $g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{1998 \text{ раз}}$ ?
10. Укажите способ разрезать произвольный треугольник на 3 части, из которых можно составить прямоугольник.

### 1999 год

- В некотором царстве, некотором государстве есть монеты трех достоинств: златники, медники и сребреники. Известно, что один златник равен 11 сребреникам, а один сребреник – 11 медникам. Королева Ольга решила купить себе ожерелье, которое стоило 1 златник, 9 сребреников и 3 медника. Какую сдачу она могла получить с двух златников?
- Найдите область определения функции  $f(x)$ , если  $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{(1-x)(x-7)}}$ .
- Докажите неравенство:  $2y^2 + x^2 + 1 - 2xy + 2y \geq 0$ .
- Решите уравнение:  $\sqrt{3x^2 + 14x - 2} = \sqrt{2x^2 + 11x + 2}$ .
- Вычислите:  $100^2 - 96^2 + 92^2 - 88^2 + \dots + 12^2 - 8^2$ .
- При каких  $a$  функция  $f(x) = ax^2 - 2ax - 7$  принимает только отрицательные значения?
- Решите неравенство:  $\cos(\sin x) > 0$ .
- В остроугольном треугольнике  $ABC$  провели медиану  $BB_1$  и высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что  $CB_1 = AB_1 = A_1B_1 = C_1B_1$ .
- На координатной плоскости Сева нарисовал прямые  $y = -2x + 4$ ,  $x = 1$ ,  $x = -1$ . После этого отличница Женя на полученном рисунке стала проводить всевозможные прямые вида  $y = a$ , где  $a \in (2, 6)$ . После проведения каждой такой прямой образуется два треугольника со сторонами, образованными проведенными прямыми. Какое наименьшее значение может принимать сумма площадей этих треугольников?
- В арифметической прогрессии сумма первых  $n$  членов равна сумме первых  $m$  членов ( $m \neq n$ ). Чему равна сумма первых  $n + m$  членов этой прогрессии.

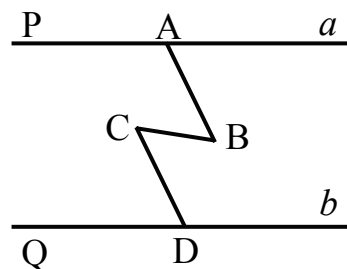


## 2000 год

1. Решите неравенство:  $\frac{x+2}{x^2+2x-3} \leq \frac{x-2}{x^2-1}$ .

2. Найдите два последовательных натуральных числа, если разность их кубов равна 331.

3. Прямые  $a$  и  $b$  параллельны,  $\angle PAB = 105^\circ$ ,  $\angle BCD = 35^\circ$ ,  $\angle ABC = \angle CDQ$ . Найдите  $\angle ABC$ .



4. Решите уравнение:  $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0$ .

5. Известно, что  $a + b + c = ab + ac + bc = 5$ . Чему может быть равно  $a^2 + b^2 + c^2$ ?

6. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $C$  на гипотенузе выбраны точки  $C_1$  и  $C_2$  так, что  $AC_2 = AC$ ,  $BC_1 = BC$ . Докажите, что длина отрезка  $C_1C_2$  равна удвоенному радиусу вписанной окружности.

## 2001 год

1. В равнобокой трапеции  $ABCD$  меньшее основание  $BC$  равно  $CD$ ,  $AD$  равно  $BD$ . Найдите угол  $\angle ABC$ .

2. При каких целых  $n$  выражение  $\frac{4n-5}{n}$  является натуральным числом?

3. Решите уравнение:  $\sqrt{5x-6} - \sqrt{x+1} = 1$ .

4. Решите систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{36} \\ xy^2 + x^2y = 324 \end{cases}$$

5. Две окружности имеют общий центр. Хорда большей окружности касается меньшей окружности. Длина хорды равна 20. Найдите площадь кольца между двумя окружностями.

6. Вертикальная сторона  $AB$  квадрата  $ABCD$  разделена точками  $A_1$  и  $A_2$  на три части так, что  $AA_1 + A_2B = A_1A_2$ . Через каждую из точек  $A_1$  и  $A_2$  проводят отрезки, параллельные стороне  $AD$ , а затем каждая из трех полученных полосок делится диагональю  $BD$  на две части: левую и правую. Докажите, что сумма площадей левых частей первой и третьей полосок равна площади правой части второй полоски.

## 2002 год

1. а) 12 человек, среди которых были мужчины, дети и женщины, несли 12 хлебов. Известно, что мужчины несли по 2 хлеба, женщины по 1/2 хлеба, дети по 1/4 хлеба. Сколько могло быть мужчин в этой группе?

б) Какие значения могут принимать натуральные числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , если известно, что  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ ?

2. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты из вершин  $A$  и  $C$ . Они пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $OC = AB$ . Найдите величину угла  $C$ .

3. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 4}(x - 3) \geq 0 \\ |x + 2|(x^2 - 5x + 6) \leq 0 \end{cases}$$

4. По кольцевой дороге едут 24 электропоезда с одинаковой скоростью и равными интервалами. Сколько электропоездов нужно добавить, чтобы при той же скорости интервалы между поездами уменьшились на 20%?

5. Решите уравнение:

$$\left( \frac{3(x+2)}{2(x^3+x^2+x+1)} + \frac{2x^2-x-10}{2(x^3-x^2+x-1)} \right) : \left( \frac{5}{x^2+1} + \frac{3}{2(x+1)} - \frac{3}{2(x-1)} \right) = \sqrt{2}.$$

6. Сколько решений в зависимости от  $a$  имеет система:

$$\begin{cases} |x| + |y| = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} ?$$

## 2003 год

1. Решите неравенство:  $x|x^2 - 1| < 3|x^2 - 1|$ .

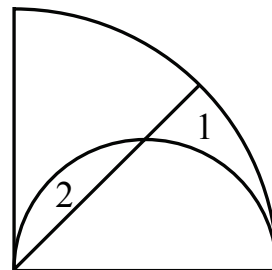
2. Решите уравнение:  $\sqrt{1-2t} + \sqrt{3-5t} = \sqrt{2-3t}$ .

3.  $ABCD$  – квадрат со стороной 4. Точка  $M$  находится на расстоянии 3 от вершины  $A$  и на расстоянии 7 от вершины  $D$ . Найдите расстояния от точки  $M$  до вершин  $B$  и  $C$ .

4. Укажите наибольшее целое отрицательное решение неравенства:

$$-\sqrt{2-x} \geq x - \frac{1}{x}.$$

5. При каких натуральных  $n$  корни квадратного уравнения  $nx^2 - 2(n-5)x + n - 7 = 0$  являются рациональными числами?
6. На рисунке изображена четверть круга, на одном из радиусов которого построен полукруг. Проведен радиус, делящий четверть круга на две равные части. Сравните площади частей 1 и 2 на рисунке.



### 2004 год

- Чему равно  $\sqrt{25-x^2}$ , если  $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = m$ ?
- Решите систему:
 
$$\begin{cases} \frac{x}{1+y^2} = z \\ \frac{z}{1+x^2} = y \\ \frac{y}{1+z^2} = x \end{cases}$$
- Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 5, больших 1 и меньших натурального числа  $m$  ( $m > 1$ ).
- Две окружности касаются внешним образом в точке  $O$ . Общая внешняя касательная касается этих окружностей в точках  $A$  и  $B$ ,  $OA = 3$ ,  $OB = 4$ . Найдите площадь треугольника  $\triangle OAB$ .
- Согласно завещанию, старший из сыновей монарха одной могущественной страны должен получить 1000 руб. и  $1/8$  остатка, второй должен получить 2000 руб. и  $1/8$  нового остатка, третий должен получить 3000 руб. и  $1/8$  нового остатка и так далее. И тогда все сыновья получат поровну (при этом сыновья поделают между собой все наследство). Возможно ли выполнить завещание, и сколько сыновей может быть при этом у монарха?
- Найдите все такие квадратичные функции  $f(x)$ , для которых  $f(1) = f(3) = 3$ , а расстояние между корнями равно 4.

## 2005 год

1. Решите уравнение:  $\sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{4x + 3}$ .
2. Решите уравнение:  $|x - 1| + |x - 2| = 1$ .
3. Найдите диагональ и площадь ромба, если его стороны равны  $10\text{ см}$ , а другая диагональ равна  $12\text{ см}$ .
4. Сумма коэффициентов квадратного трехчлена равна  $2$ . Найдите его корни, если координаты вершины соответствующего ему графика  $(4; -2,5)$ .
5.  $x - y = 10$ . Докажите, что  $x^2 - 2y^2 \leq 200$ .
6. Решите неравенство:  $\frac{2x - 3}{4x - 1} \geq \frac{x - 2}{x + 2}$ .

## 2006 год

1. При каких значениях параметра  $a$  наименьшее значение выражения  $ax^2 - 4ax + 3$  на отрезке  $[0, 2]$  равно  $3$ ?
2. Решите уравнение:  $\sqrt[5]{x - 1} = 1 - x$ .
3. Треугольники, образованные боковыми сторонами трапеции, описанной около окружности, и центром этой окружности, имеют площади  $1$  и  $2$ . Найдите площадь всей трапеции.
4. Решите неравенство:  $\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} \geq -2,5$ .
5. Найти наименьшее число  $y$ , удовлетворяющее системе 
$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y \geq 12 - x^2 \end{cases}$$
.
6. Последовательность задана формулой  $a_n = 2006 \cdot 1973^n$ . Найдутся ли три члена этой последовательности (не обязательно подряд идущие), которые образуют арифметическую прогрессию?

## Задачи вступительных работ в 9 класс

2003 год

1. Решите уравнение:  $(x^2 - 5x + 7) - (x - 2)(x - 3) = 1$ .
2. Биссектрисы углов параллелограмма пересекаются внутри него. Докажите, что точки пересечения являются вершинами прямоугольника.
3. Решите уравнение:  $\sqrt{(x-1)^2 + 4x} - \sqrt{(x+2)^2 - 8x} = -1$ .
4. Упростите:  $(1 + \sqrt{7})^2 + \sqrt{(2\sqrt{7} - 10)^2}$ .
5. Заплатив вместе 100 рублей, Костя и Сережа купили поровну пирожных, при этом сдача составила столько рублей, сколько купили пирожных. Больше им не хватило ни на одно пирожное. Сколько они купили пирожных? (Пирожное стоит целое число рублей.)

2004 год

1. Придумайте восьмизначное натуральное число, у которого все цифры различны, и при вычеркивании любых двух цифр останется составное число.
2. Известно, что:
$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x + y + t = 11 \\ x + z + t = 15 \\ y + z + t = 3 \end{cases}$$
Вычислите  $x + y + z + t$ .
3. Три брата: Саша, Паша и Сережа – отправились из ФТШ домой. Саша вышел первым, а Паша последним. По дороге домой Саша обгонял других, либо его обгоняли ровно 8 раз, а Паша – 6 раз. Известно, что Саша пришел домой позже, чем Сережа. В каком порядке братья пришли домой?
4. Известно:  $x^2 + y^2 = -z(2y + z)$ . Вычислите:  $(y + 2z)^2 - x(y^2 + z) - (z - 1)(z + 1)$ .

5. Докажите, что при всяком  $x$  число  $\frac{1}{4}(x + |3x - 2|)$  совпадает с наибольшим из чисел  $x - \frac{1}{2}$  и  $\frac{1-x}{2}$ .
6. Дан треугольник  $KLM$ . Проведены биссектрисы его внешних углов  $L$  и  $M$  в той полуплоскости, где лежит точка  $K$ . Из точки  $K$  проведены перпендикуляры  $KA$  и  $KB$  на эти биссектрисы. Периметр треугольника  $KLM$  равен 5. Найдите длину отрезка  $AB$ .

### 2006 год

1. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  медиана  $CM = 12$  см, а расстояние от середины катета  $AC$  до гипотенузы  $AB$  равно 3 см. Найти площадь треугольника  $ABC$ .
2. Решите неравенство  $(x^2 - 5x + 4) \cdot \sqrt{x^2 - 7x + 10} \geq 0$ .
3. При каком значении параметра  $a$  уравнение  $(a + 2)x^2 + 2(a + 2)x + 2 = 0$  имеет ровно один корень?
4. Физики Миша, Саша, Сережа и Андрюша вместе съели 70 бананов, причем каждому сколько-то досталось. Миша съел больше каждого из остальных, а Сережа и Саша вместе съели 45 бананов. Сколько бананов досталось Андрюше?
5. Найдите наименьшее значение выражения  $(x + y)^2 - 2y$ , если  $\frac{2x}{2y + x} + \frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ .
6. Прямоугольник состоит из 12 квадратов (смотри рисунок). Найдите сумму отмеченных на рисунке углов.

